

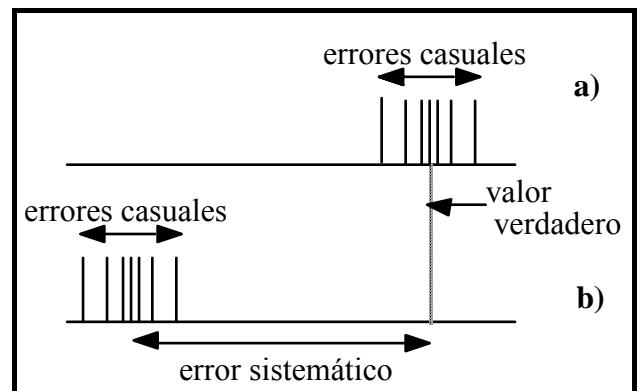
RESUMEN de TEORIA DE ERRORES

La **sensibilidad** de un instrumento es la variación más pequeña que éste puede medir, y suele corresponder a la división más pequeña de la escala de medida o a una fracción de ésta. La **precisión** sin embargo está relacionada con la reproducibilidad del resultado de la medida de una magnitud. Puede disminuir en aparatos en malas condiciones, por uso inadecuado de los mismos o por la presencia de factores que disturben la medida.

Generalmente la sensibilidad de los instrumentos es igual a su precisión en condiciones de uso normales. El **error de sensibilidad** es el error mínimo en la medida de una magnitud y es el que se suele adoptar cuando se realiza una única medida.

a) Errores casuales o accidentales

A menudo el error de medida supera al error de sensibilidad debido a factores casuales e incontrolables que en conjunto hacen que existan diferencias entre la medida de una magnitud y su valor "verdadero". Es imposible su eliminación aunque se puede efectuar una estimación de su valor.



b) Errores sistemáticos

La diferencia entre el valor medido y el "verdadero" de una magnitud supera el intervalo de variación de los errores casuales. Indican una incorrección del método experimental o defectos instrumentales. Se pueden poner en evidencia mediante la utilización de distintos métodos de medida y su eliminación es posible.

ESTIMACIÓN DEL VALOR DE UNA MAGNITUD Y DE SU ERROR

Sea una magnitud x de la cual se realizan N medidas experimentales. Su valor estará dado por una estimación x^* (la mejor que se pueda obtener a partir de los datos experimentales) del valor verdadero. Dicho valor debe ir acompañado de una estimación del error absoluto ε_x que indique la anchura del intervalo de dispersión de los datos experimentales, dentro del cual se encuentra el valor verdadero. Así, la medida de x se expresará como: $x^* \pm \varepsilon_x$

Estimación del valor de x

Intuitivamente, dada la naturaleza de los errores casuales, podemos esperar una distribución simétrica de los valores experimentales de x , de manera que la estimación del valor verdadero de x (x^*) se corresponda con una posición central en la distribución de valores observados. La mejor estimación de x es la **media aritmética** \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

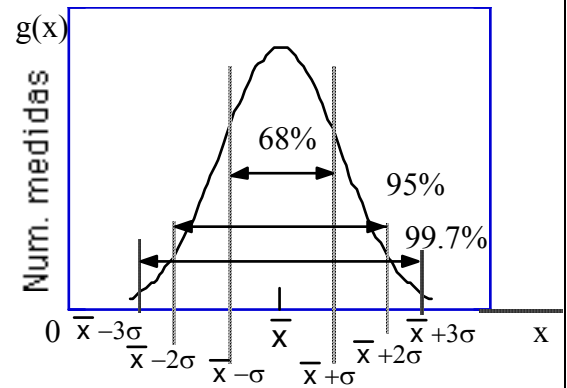
Estimación del error (o dispersión) de x:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR σ

(o error estándar o error cuadrático medio)

$$\varepsilon_x = \sigma \approx \mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}} \quad [2]$$

Suponiendo que la distribución límite (cuando $N \rightarrow \infty$) de nuestras medidas sea una gaussiana, es posible calcular la desviación estándar σ y escribir el resultado de la medida como: $[\bar{x} \pm \sigma]$, donde al error σ se le asigna una fiabilidad del 68% (es decir, existe una probabilidad del 68% de que el valor "verdadero" se encuentre comprendido en el intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$). O, equivalentemente, en dicho intervalo está comprendido el 68% de las medidas.



$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

En la práctica disponemos de un número finito N de medidas y la mejor estimación de la desviación estándar σ la proporciona la **desviación cuadrática media μ** . Podéis observar que su valor disminuye con el aumento de N. Esta estimación del error es aceptable a partir de $N \approx 10, 20$ datos experimentales, y es la que se adopta con mayor frecuencia (no solo en física). Además, su cálculo está predispuesto en la mayoría de calculadoras de bolsillo.

<p>Error de semidispersión máxima</p> $\varepsilon_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \quad [3]$	<p>Es la estimación más burda de la dispersión y se suele utilizar cuando el número de medidas es pequeño ($\sim 3,4$). Tiene el defecto de que ignora la mayor parte de los datos y en particular los más próximos al centro de la distribución, y su valor aumenta con el número de medidas. A veces se usa el error de dispersión $\varepsilon_x = (x_{\max} - x_{\min})/4$.</p>
<p>Desviación media absoluta</p> $\varepsilon_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \bar{x} \quad [4]$	<p>Tradicionalmente poco usada debido al carácter no analítico del valor absoluto. En distribuciones no exactamente gaussianas, con puntos de "cola" significativos, se considera una estimación más robusta.</p>

DATOS POCO FIABLES

En la toma de medidas se pueden cometer equivocaciones de distinta índole que den lugar a algún dato erróneo. Dicho dato "sospechoso" se puede identificar siguiendo el siguiente criterio: aquel que aparezca fuera del intervalo $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$. La probabilidad de que un dato quede fuera de dicho intervalo es del 0.3%, por lo que si tenemos por ejemplo 60 datos, solo 0.18 datos pueden estar fuera. Si aparecen uno o dos, su eliminación está justificada (se procedería a recalculer la media y la desviación sin el dato equivocado). Este criterio es válido siempre que el número de datos no sea excesivamente grande (por ejemplo, el 0.3% de $N=1000$ supone 3 datos que pueden estar razonablemente fuera del intervalo de semiamplitud 3σ y que no serían despreciables).

ERROR RELATIVO ε_r

El error relativo de una magnitud está dado por $\varepsilon_{Mr} = \varepsilon_M / M$. La precisión en la medida de una magnitud aumenta si se reduce el error relativo. Éste permite hacer comparaciones entre precisiones en la medida de magnitudes, incluso si éstas son de distinta naturaleza.

PROPAGACIÓN DE ERRORES

En una medida indirecta, el valor de una magnitud M depende de la medida directa de otras magnitudes x, y, z , etc... con las cuales M mantiene una relación funcional: $M = M(x, y, z, \dots)$. Si los errores de las medidas directas son pequeños, el valor de M estará dado por:

$$\boxed{M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \pm \varepsilon_M}$$

Si x, y, z , etc... se dan con sus errores máximos y se pretende obtener también el error máximo de M , suponiendo que los errores de las medidas directas no se compensan entre sí (la estimación más pesimista, tomando el valor absoluto), entonces

$$\varepsilon_M = \left| \frac{\partial M}{\partial x} \right| \varepsilon_x + \left| \frac{\partial M}{\partial y} \right| \varepsilon_y + \left| \frac{\partial M}{\partial z} \right| \varepsilon_z + \dots$$

[5]

Mientras que si los errores $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, etc... son estadísticos (coinciden con las desviaciones estándar $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$), dichos errores en parte se compensan, y la estimación [5] resulta inadecuada. El error estándar de M está dado por:

$$\boxed{\varepsilon_M = \sigma_M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x} \varepsilon_x \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y} \varepsilon_y \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial z} \varepsilon_z \right)^2 + \dots}} \quad [6]$$

Ésta es la estimación que más se utiliza, incluso en casos en los que los errores de las variables son máximos o son errores de sensibilidad. Algunos autores aconsejan homogeneizar los errores de manera que sean todos máximos o todos estándar, según la relación: $\varepsilon_{\max} = 3\sigma$. (Se ha visto que es bastante improbable que una medida quede fuera del intervalo de semiamplitud 3σ).

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Las cifras significativas son aquellos dígitos que constituyen el valor de una cierta magnitud, exceptuando los ceros indicativos del orden de magnitud o, equivalentemente, de la distancia al punto decimal. (Ejemplo: $10600 = 106 \cdot 10^2$ tiene 3 cifras significativas, $0.0180 = 1.80 \cdot 10^{-2}$ también tiene 3).

Al escribir el resultado de las mediciones deben cumplirse las reglas siguientes:

1. El error se debe redondear hasta dos cifras significativas si la primera de ellas es la unidad, y hasta una cifra significativa en los demás casos (hay quien acepta, en general, dos cifras máx.).
2. Al escribir el valor de la magnitud hay que indicar todas las cifras hasta la última de orden decimal con la que se escribe el error.

ejemplos: $5.29 \pm 0.0134 \rightarrow 5.290 \pm 0.013$; $3800 \pm 203 \rightarrow (3.8 \pm 0.2)10^3$

Reglas para el redondeo:

- Si la primera cifra despreciada es mayor que 4, la última cifra conservada se aumenta en una unidad. (27.3763 redondeada hasta las centésimas \rightarrow 27.38).
- Si la primera cifra despreciada es menor o igual que 4, la última cifra conservada no varía.
(13847 redondeada hasta las centenas \rightarrow $138 \cdot 10^2$).
- Opcional: Si la parte que se desprecia está constituida por una cifra 5 solamente, el número se redondea de manera que la última cifra conservada sea par.
(23.65 \approx 23.6, 17.75 \approx 17.8).

BUEN USO Y LIMITACIONES DE LOS CRITERIOS DE ERRORES

En las páginas anteriores se han resumido los criterios más extendidos en la presentación de datos experimentales. Cabría incidir en el buen uso de dichos criterios y en las limitaciones a los que estos están sujetos. Comencemos con el **buen uso**: como ya se ha expuesto, cuando se mide una magnitud lo que en realidad tenemos es una colección de datos que se deben presentar proporcionando un valor central y una estimación de la dispersión de los valores, que suele ser la desviación estándar. Para considerarla una estimación aceptable, es preferible disponer de al menos 10 datos. Ahora, existen medidas en las que el error de sensibilidad es superior al de dispersión estándar o a cualquier otro que se quiera emplear. Por ejemplo, si se mide la anchura de un papel A4 con una regla de 30 cm graduada en milímetros, es absurdo realizar 10 medidas que, si tomadas con atención, serán prácticamente idénticas. Basta tomar una medida y asignarle el error de sensibilidad. Un caso distinto sería si con la misma regla quisieramos medir las dimensiones de la habitación. Se deja, pues, al buen juicio del alumno, la asignación del error en cada caso.

Sigamos con las **limitaciones**: Hemos dicho que la distribución de los errores casuales tiende a la distribución gaussiana o normal. Tal distribución es ideal y en la práctica se dispone de pocos datos reales que raramente se distribuyen "normalmente". O nunca. Por ejemplo, en medidas obtenidas mediante el conteo de sucesos el error sigue la distribución de Poisson, que da más peso a la cola de la distribución. Otras veces, las desviaciones de la distribución normal no se comprenden tan bien. Es el caso de la aparición de puntos poco probables (fuera del intervalo de semiamplitud máxima 3σ) con más frecuencia de la esperada. La *estadística robusta* se ocupa de estos casos en los que el modelo gaussiano no es una buena aproximación. Es importante pues que, junto con las ventajas que proporciona el modelo gaussiano propuesto, se recuerden sus limitaciones.